



# Simulation d'écoulements diphasiques compressibles en milieu poreux

Jean Roberts, G. Salzano

## ► To cite this version:

Jean Roberts, G. Salzano. Simulation d'écoulements diphasiques compressibles en milieu poreux. [Rapport de recherche] RR-0251, INRIA. 1983. inria-00076307

**HAL Id: inria-00076307**

**<https://hal.inria.fr/inria-00076307>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE ROCQUENCOURT

Rapports de Recherche

N° 251

**SIMULATION D'ÉCOULEMENTS  
DIPHASIQUES COMPRESSIBLES  
EN MILIEU POREUX**

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Roquencourt  
BP 105

78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. 954 90 20

Jean Elizabeth ROBERTS  
Gabriella SALZANO

Octobre 1983

SIMULATION D'ÉCOULEMENTS DIPHASIQUES

COMPRESSIBLES EN MILIEU POREUX

---

Jean Elizabeth ROBERTS\*, Gabriella SALZANO\*\*.

\*  
INRIA, 78150 Le Chesnay, FRANCE.

\*\*  
CNR-IAC, ROME ITALIE.



PAPIER RÉCUPÉRÉ ET RECYCLÉ

## RESUME

On présente un modèle numérique pour la simulation de déplacements compressibles immiscibles dans un milieu poreux. Le modèle est basé sur une formulation mathématique incorporant la notion de pression globale. L'équation en saturation est approchée par une méthode d'éléments finis mixtes en combinaison avec une méthode de décentrage à la Godunov, et l'équation en pression par des éléments finis mixtes. Une méthode IMPES est utilisée pour la discrétisation en temps. Des résultats numériques sont présentés dans le cas unidimensionnel.

## ABSTRACT

A numerical method for the simulation of a compressible, immiscible displacement in a porous medium is presented. The model is based on a mathematical formulation incorporating the notion of a global pressure. The saturation equation is approximated by a mixed finite element method together with an upwinding scheme à la Godunov and the pressure equation by mixed finite elements. An IMPES method is used for the time stepping. Numerical results are presented in the one dimensional case.

## Mots Clés

Simulation de réservoirs, éléments finis mixtes, décentrage, schéma en temps.

## Key Words

Réservoir simulation, mixed finite elements, upwinding, time stepping.

## I - INTRODUCTION

On considère le déplacement diphasique, immiscible d'un fluide compressible par un autre dans un milieu poreux. Le modèle mathématique qu'on utilise est un système non linéaire formulé par Chavent. [2] employant l'idée d'une pression globale. Le système se compose de deux équations paraboliques, une équation en pression et une équation en saturation du type convection-diffusion.

Le but de ce travail est d'étendre au cas compressible les méthodes employées par Chavent et Salzano dans le cas incompressible [3], [9]. Dans l'équation en saturation le terme de transport, qui peut-être non monotone, est approché par un schéma du type Godunov pour les éléments finis qui se réduit à celui de Lesaint et Raviart [8] dans le cas monotone tandis qu'une méthode des éléments finis mixtes est utilisée pour le terme de diffusion afin de permettre l'emploi d'éléments finis discontinus pour approcher la saturation. Pour l'équation en pression, comme on veut bien approcher les vitesses, on utilise aussi des éléments finis mixtes, cf. [4] [5] [7].

Pour le schéma en temps, on emploie une méthode du type IMPES (Implicit en Pression, Explicit en Saturation), cf. [1]. L'équation en pression est résolue avec un schéma aux différences retardées, bien que les coefficients qui dépendent à la fois de la saturation et de la pression soient évalués à l'instant précédent. Puis, l'équation en saturation est résolue explicitement en utilisant un schéma aux différences avancées. La dérivée en temps de la saturation qui apparaît dans l'équation en pression est éliminée en lui substituant son expression tirée de l'équation explicite en saturation. Le système non linéaire en pression-vitesse obtenu ainsi est résolu par des itérations de point fixe. Avec ce schéma on a pu multiplier le pas de temps d'un facteur 40 par rapport au pas de temps admissible pour un schéma explicite sans augmenter de façon notable le temps de calcul par pas de temps.

Dans la suite pour simplifier, le schéma est décrit dans le cas unidimensionnel car nous ne présenterons de résultats numériques que pour la dimension un. Le cas unidimensionnel est intéressant pour lui-même dans la simulation d'expériences de laboratoire dans l'industrie pétrolière, pour la détermination des propriétés de carottes de gisements. Cependant, le schéma peut être aussi bien écrit pour le cas multidimensionnel.

Le paragraphe deux formule le modèle mathématique. Dans le paragraphe trois on présente le schéma en espace et dans le paragraphe quatre on décrit la discrétisation en temps pour ce schéma. Le paragraphe cinq contient les résultats numériques.

## II - FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

On identifie un barreau poreux  $\Omega$  avec l'intervalle  $[a,b]$  où  $\{a\}$  est la frontière d'injection et  $\{b\}$  est la frontière de production.

Dans la suite on utilise le modèle mathématique formulé par Chavent dans [2]. On appellera fluide 1 et fluide 2 respectivement le fluide non mouillant et le fluide mouillant et  $\bar{s}_1$  et  $\bar{s}_2$  leurs saturations respectives. La saturation  $\bar{s}_1$  peut varier entre  $\bar{s}_m$  et  $\bar{s}_M$ , respectivement saturations minimale et maximale du fluide 1. On note  $s$ , la saturation réduite du fluide 1,

$$(2.1) \quad s = \frac{\bar{s}_1 - \bar{s}_m}{\bar{s}_M - \bar{s}_m},$$

qui varie donc entre 0 et 1. Comme on s'intéresse à la production d'huile par injection de gaz, on dira souvent "gaz" et "huile" au lieu de "fluide 1" et "fluide 2".

Soit  $p$  la pression globale, cf. [2] et appendice 3, comprise entre  $p_1$  et  $p_2$ , les pressions des deux fluides. Le modèle est obtenu à partir de la loi de Darcy, de la loi de conservation de la masse et de la loi de la pression capillaire. Les vitesses de filtration des deux fluides étant  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , avec les notations de l'appendice 1, ces lois s'écrivent, en négligeant l'erreur faite en évaluant les fonctions de densité et de viscosité avec  $p$  au lieu de  $p_j$ :

### Loi de Darcy

$$(2.2) \quad \phi_j = -\psi(x) k_j(s, p) [ \text{grad } p_j - \rho_j(p) g \text{ grad } Z(x) ] , \quad j = 1, 2$$

### Loi de conservation de la masse

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} [ \Phi(x, p) \sigma(x) B_j(p) \bar{s}_j ] + \text{div } \phi_j = 0 , \quad j = 1, 2$$

### Loi de la pression capillaire

$$(2.4) \quad p_1 - p_2 = p_{CM}(x) p_c(s).$$

En notant  $q_0$  la vitesse totale,

$$(2.5) \quad q_0 = \phi_1 + \phi_2 ,$$

et en utilisant les notations de l'appendice 1 on peut écrire (cf. appendice 3) :

$$(2.6) \quad \phi_1 = \sum_{j=0}^2 b_j(s,p) q_j(x) - \tilde{\psi}(x,s,p) \text{ grad } \alpha(s).$$

On porte cette expression de  $\phi_1$  dans (2.3) avec  $j = 1$ , on note

$f(x,s,p,q_0) = \sum_{j=0}^2 b_j(s,p) q_j(x)$ , et on introduit comme inconnue indépendante  $r = -\tilde{\psi}(x,s,p) \text{ grad } \alpha(s)$ . On obtient ainsi l'équation en saturation qui s'écrit sous la forme du système du premier ordre :

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} [ \phi(x,p) B_1(p) (s+s_{\min}) ] + \text{div} [ f(x,s,p,q_0) + r ]$$

$$(2.8) \quad r = -\tilde{\psi}(x,s,p) \text{ grad } \alpha(s) .$$

On obtient l'équation en pression en faisant la somme des deux équations (2.3). On additionne les équations (2.2) et on exprime les pressions  $p_1$  et  $p_2$  en fonction de la pression globale, cf. Appendice 3. On obtient ainsi l'expression suivante pour  $q_0$  :

$$q_0 = -\psi(x) d(x,s,p) \text{ grad } p + d(x,s,p) \sum_{j=1}^2 \gamma_j(x,s,p) q_j(x).$$



Introduisant  $q_0$  comme inconnue indépendante on peut écrire l'équation en pression sous la forme du système du premier ordre :

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi(x) [B_1(p)(s + s_{\min}) + B_2(p)(s_{\max} - s)] \} + \operatorname{div} q_0 = 0$$

$$(2.10) \quad q_0 = -\psi(x) d(x,s,p) \operatorname{grad} p + d(x,s,p) \sum_{j=1}^2 \gamma_j(x,s,p) q_j(x).$$

### Les conditions au bord

Pour l'équation en saturation on utilise les conditions au bord décrites dans [3]. Sur la frontière d'injection elles sont :

$$\text{soit : } s(a) = s_{ad}$$

$$\text{soit : } \phi_1(a) = \phi_{ad}$$

où  $s_{ad}$  et  $\phi_{ad}$  représentent respectivement une saturation donnée, qui en pratique sera toujours 1, et un débit d'injection donné, qui en pratique sera  $q_0(a)$ . Ces conditions représentent dans les deux cas une injection de fluide 1, et on observe que, soit avec  $s_{ad}=1$ , soit avec  $\phi_{ad}=q_0(a)$ , la condition de continuité des pressions est satisfaite, i.e. les deux fluides ne peuvent pas traverser la frontière simultanément sauf quand la pression capillaire est zéro.

Afin de satisfaire la condition de continuité des pressions sur la frontière de production on impose :

$$\begin{cases} s(b) & \leq s_c \\ \phi_1(b) & \geq 0 \\ (s(b)-s_c) \phi_1(b) & = 0 \end{cases}$$

où  $s_c$  est la saturation qui annule la pression capillaire. Ainsi la saturation de fluide 1 ne peut pas être plus grande que la saturation pour laquelle la pression capillaire est zéro, le fluide 1 ne peut pas entrer par cette frontière ; et en outre, le fluide 1 ne peut pas sortir à moins que la pression capillaire ne soit égale à zéro. On remarque que dans le cas qui nous intéresse, où le gaz injecté est le fluide non mouillant,  $s_c = 0$ , ce qui implique  $s(b) = 0$ . Ainsi, dans ce cas, la saturation du gaz injecté sur la frontière de production est toujours nulle, même lorsqu'il la traverse.

Pour l'équation en pression on impose comme conditions au bord soit Dirichlet soit Neumann. Sur la frontière de production elles sont :

$$\text{soit } p(b) = p_{bd}$$

$$\text{soit } q_0(b) = q_{bd}$$

où  $p_{bd}$  et  $q_{bd}$  sont donnés. Sur la frontière d'injection on impose :

$$\text{soit } p(a) = p_{ad}$$

$$\text{soit } q_0(a) = q_{ad}$$

où  $p_{ad}$  et  $q_{ad}$  sont donnés.

On pose les conditions initiales :

$$s = s_0$$

$$p = p_0,$$

### III- APPROXIMATION EN ESPACE

On note  $\mathcal{C}$  la discrétisation de l'intervalle  $\Omega$ ,

$\mathcal{C} = \{ a = x_1 < x_2 < \dots < x_I = b \}$ , et on pose  $h = \sup \{x_{i+1} - x_i : i=1, \dots, I-1\}$ .  
Dorénavant, quand il n'y aura pas danger de confusion, on omettra la variable  $x$  en écrivant les fonctions qui en dépendent.

Pour l'équation en saturation on utilise le schéma décrit dans [3] et [9]. C'est une approximation discontinue utilisant une méthode d'éléments finis mixtes pour approcher la diffusion et une généralisation de la méthode de Godunov pour approcher le terme de transport.

On note  $X_h^k \times M_h^k$  un espace de Raviart-Thomas d'index  $k$ ,  $k \geq 0$ . Dans le cas de la dimension 1,  $X_h^k$  est l'espace des fonctions continues polynôme de degré  $k+1$  dans chaque intervalle ;  $M_h^k$  est l'espace des fonctions discontinues polynôme de degré  $k$  dans chaque intervalle. De plus la solution  $s$  de (2.7), ..., (2.10) a une trace sur la frontière et nous définirons aussi une approximation  $\{s_a, s_b\}$  de cette trace.

Etant données des approximations  $q_{0,h}$  et  $p_h$  de la vitesse et de la pression, on cherche une fonction  $(r_h, s_h)$  de l'intervalle de temps

$J$  dans  $X_h^k \times M_h^k$  et une fonction  $(s_a, s_b)$  de  $J$  dans  $\mathbb{R}^2$

satisfaisant. :

$$(3.1) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi(p_h) B_1(p_h) (s_h + s_{\min}) \} w \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial r_h}{\partial x} w \, dx$$

$$- \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s_h, p_h, q_{0,h}) \frac{\partial w}{\partial x} \, dx + f(\xi_{i+1}) w(x_{i+1}) - f(\xi_i) w(x_i) = 0$$

$$w \in X_h^k, \quad i = 1, \dots, I - 1$$

et

$$(3.2) \quad \int_a^b \frac{1}{\tilde{\psi}(s,p)} r_h v \, dx - \int_a^b \alpha(s_h) \frac{\partial v_h}{\partial x} + \alpha(s_a) v(a) - \alpha(s_b) v(b) = 0$$

$$v \in M_h^k$$

et des conditions aux bords.

Les  $f(\xi_i)$  sont des valeurs de Godunov définies dans [3],

telles que  $f(\xi_i) = f(x_i, \xi_i, p_h(x_i), q_{0,h}(x_i))$  où  
 $\operatorname{sgn}(s_i^+ - s_i^-) f(x_i, \xi_i, p_h(x_i), q_{0,h}(x_i)) \leq \operatorname{sgn}(s_i^+ - s_i^-) f(x_i, k, p_h(x_i), q_{0,h}(x_i))$

pour chaque  $k$  entre  $s_i^+$  et  $s_i^-$ , avec

$$\begin{aligned} s_i^+ &= s_h(x_i + 0) \quad i = 1, \dots, I - 1, \quad s_I^+ = s_b \\ s_i^- &= s_h(x_i - 0) \quad i = 2, \dots, I, \quad s_1^- = s_a. \end{aligned}$$

Notons que même si les valeurs  $\xi_i$  sont éventuellement non uniques, c'est seulement la valeur  $f(\xi_i)$  qui nous intéresse et elle peut être écrite comme fonction de  $s_i^-$  et  $s_i^+$  :

$$(3.3) \quad f(\xi_i) = \theta(s_i^-, s_i^+).$$

La vitesse de filtration du gaz  $\phi_1$  est approchée par

$$(3.3a) \quad \begin{cases} \phi_{1h}(x) = f(x, s_h(x), p_h(x), q_{0,h}(x)) + r_h(x_i), x_i < x < x_{i+1}, i=1, \dots, I-1. \\ \phi_{1h}(x_i) = f(\xi_i) + r_h(x_i), i=1, \dots, I. \end{cases}$$

On initialise le processus en prenant pour  $s_h$  à  $t = 0$  une approximation de  $s_0$  dans  $M_h^k$ .

Pour les calculs, la condition au bord en  $b$  est réduite soit à une condition de Neumann,  $\phi_1(b) = \phi_{bd} = 0$ , soit à une condition de Dirichlet,  $s(b) = s_{bd} = s_c$ . Donc pour approcher les traces de  $s$ , il suffit de définir

les approximations des conditions de Neumann et de Dirichlet. Rappelons qu'ici  $s_c = 0$  et la condition en  $b$  est simplement  $s(b) = 0$ . La condition de Dirichlet devient

$$(3.4a) \quad s_e = s_{ed} \quad e = a \text{ ou } b,$$

et la condition de Neumann,

$$(3.4b) \quad \begin{aligned} \phi_{1h}(x_1) &= \phi_{ad} & \text{en } x = a \\ \phi_{1h}(x_I) &= \phi_{bd} & \text{en } x = b. \end{aligned}$$

La condition de Neumann est plus compliquée parce que  $f(\xi_1)$  et  $r_h(x_1)$  (respectivement  $f(\xi_I)$  et  $r_h(x_I)$ ) dépendent d'une façon non linéaire de  $s_a$  (respectivement  $s_b$ ), mais on verra que dans le cas  $k = 1$  cela ne pose pas de problème, cf. [3].

Pour approcher l'équation en pression on utilise les éléments finis mixtes. On approchera aussi la trace de  $p$  en  $\{a, b\}$ . On note

$X_h^\ell \times M_h^\ell$  un espace de Raviart-Thomas d'index  $\ell$ ,  $\ell \geq 0$ , correspondant à  $\mathcal{T}$ . Etant donnée une approximation  $s_h$  de  $s$  on cherche une fonction  $(q_{0,h}, p_h)$  de  $J$  dans  $X_h^\ell \times M_h^\ell$  et une fonction  $(p_a, p_b)$  de  $J$  dans  $\mathbb{R}^2$  satisfaisant :

$$(3.5) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi(p_h) \frac{B_1(p_h)(s_h + s_{\min}) + B_2(p_h)(s_{\max} - s_h)}{2} \right\} v \, dx \\ + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} q_{0,h} v \, dx = 0 \quad v \in X_h^\ell, \quad i = 1, \dots, I-1$$

et

$$(3.6) \quad \int_a^b \frac{1}{\psi d(s_h, p_h)} q_{0,h} w \, dx - \int_a^b p_h \frac{dw}{dx} \, dx \\ = \int_a^b \frac{1}{\psi} \sum_{j=1}^2 \gamma_j(s_h, p_h) q_j \, dx - p_b w(b) + p_a w(a) \\ w \in M_h^\ell$$

avec les conditions aux bords,

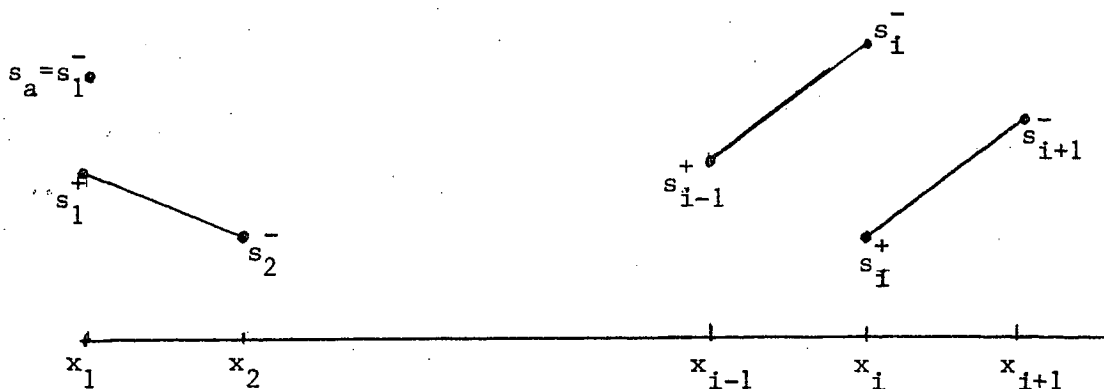
$$(3.7a) \quad \text{soit } p_e = p_{ed}$$

$$(3.7b) \quad \text{soit } q_{0,e} = q_{ed}, \quad e = a \text{ ou } b.$$

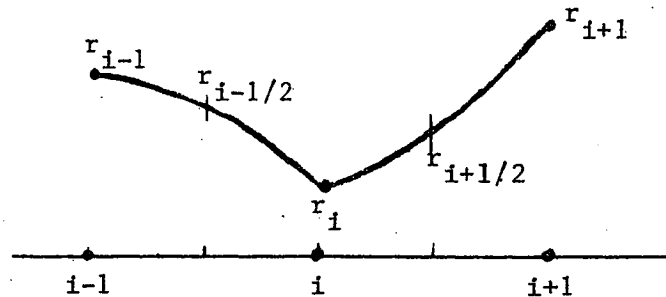
On impose au temps  $t = 0$  la condition initiale  $p = p_{0,h}$  où  $p_{0,h}$  est une approximation dans  $M_h^\ell$  de  $p_0$ .

Il nous faut encore compléter la définition de notre schéma car les valeurs de Godunov dépendent des valeurs  $p_h(x_i)$  qui ne sont pas définies puisque  $p_h$  est discontinue en  $x_i$ . C'est pourquoi pour évaluer  $f$  dans (3.1), et donc aussi pour déterminer les valeurs  $f(\xi_i)$ ,  $i = 1, \dots, I$ , on remplace  $p_h$  par une approximation  $\tilde{p}_h$  continue, convenable.

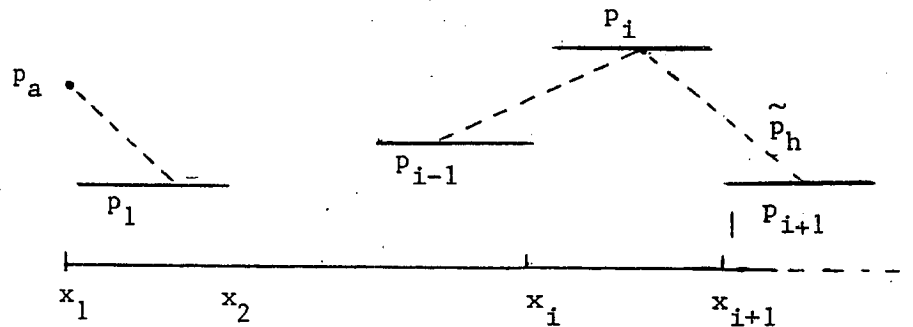
Dans nos calculs nous avons approché la saturation dans un espace de Raviart-Thomas d'index  $k = 1$ , et comme on s'attend à perdre en précision dans l'approximation de la saturation à cause du décentrage, on a utilisé pour l'équation en pression un espace d'un ordre de moins que dans l'équation en saturation, i.e.  $\ell = 0$ . Donc  $s_h$  est discontinue et linéaire par morceaux et est déterminée sur l'intervalle  $(x_i, x_{i+1})$  par les valeurs  $s_i^+$  et  $s_{i+1}^-$ ,  $i = 1, \dots, I-1$ .



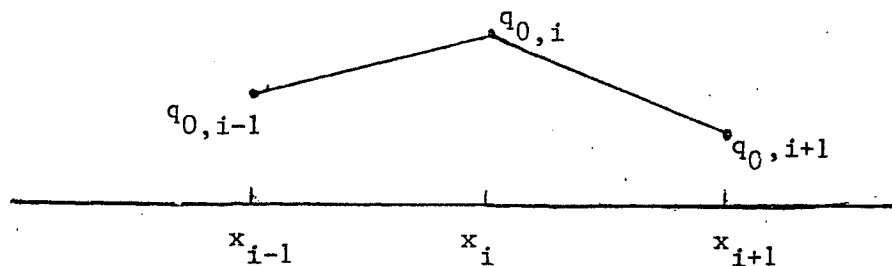
La fonction  $r_h$  est continue et quadratique par morceaux. Elle est déterminée par les valeurs  $r_i = r_h(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, I$  et  $r_{i+1/2} = r_h((x_i + x_{i+1})/2)$ ,  $i = 1, \dots, I - 1$ .



La fonction  $p_h$  est discontinue, constante par morceaux, et elle est déterminée par ses valeurs  $p_i$  constantes sur l'intervalle  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, I - 1$ . L'approximation continue  $\tilde{p}_h$  est égale à  $p_i$  en  $(x_i + x_{i+1})/2$ ,  $i = 1, \dots, I - 1$ , à  $p_a$  en  $x_1$ , à  $p_b$  en  $x_I$ , et elle est linéaire entre ces points.



La fonction  $q_{0,h}$  est continue et linéaire par morceaux et donc elle est donnée par les valeurs aux points  $x_i$ ,  $q_{0,i} = q_h(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, I$ .





On a utilisé la formule de Simpson pour calculer les intégrales dans l'équation en saturation, (3.1) et (3.2).

Ainsi (3.1) est devenue :

$$(3.8) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi(p_i) B_l(p_i) [ 2(s_i^+ - s_{min}) + (s_{i+1}^- - s_{min}) ] \} \\ & + \frac{1}{h} [ 5r_i - 4r_{i+1/2} - r_{i+1} ] \\ & + \frac{1}{h} [ f_i^+ + 4f_{i+1/2} + f_{i+1}^- - 6f(\xi_i) ] = 0 \quad i=1, \dots, I-1, \\ & \frac{\partial}{\partial t} \{ \phi(p_i) B_l(p_i) [ (s_i^+ - s_{min}) + 2(s_{i+1}^- - s_{min}) ] \} \\ & + \frac{1}{h} [ r_i + 4r_{i+1/2} - 5r_{i+1} ] \\ & + \frac{1}{h} [ -f_i^+ - 4f_{i+1/2} - f_{i+1}^- + 6f(\xi_{i+1}) ] = 0 \quad i=1, \dots, I-1 \end{aligned} \right.$$

où  $f_i^+ = f(s_i^+, \tilde{p}_h(x_i), q_{0,i})$ ,  $f_{i+1}^- = f(s_{i+1}^-, \tilde{p}_h(x_{i+1}), q_{0,i+1})$ ,

et  $f_{i+1/2} = f(s(x_{i+1/2}), \tilde{p}_h(x_{i+1/2}), q_{0,h}(x_{i+1/2}))$ ,

avec  $x_{i+1/2} = \frac{1}{2} (x_i + x_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, I-1$ .

et (3.2) est devenue :

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tilde{\psi}_1^+} r_1 + \frac{1}{h} [-3\alpha_1^+ - 4\alpha_{3/2} + \alpha_2^-] + \frac{6}{h} \alpha(s_c) = 0 \\ \\ \frac{1}{\tilde{\psi}_{i+1/2}} r_{i+1/2} + \frac{1}{h} [4\alpha_i^+ - 4\alpha_{i+1}^-] = 0, \quad i = 1, \dots, I-1 \\ \\ \left( \frac{1}{\tilde{\psi}_i^-} + \frac{1}{\tilde{\psi}_i^+} \right) r_i + \frac{1}{h} [-\alpha_{i-1}^+ + 4\alpha_{i-1/2} + 3\alpha_i^- - 3\alpha_i^+ \\ - 4\alpha_{i+1/2} + \alpha_{i+1}^-] = 0 \\ \\ i = 2, \dots, I-1 \\ \\ \frac{1}{\tilde{\psi}_I^-} r_I + \frac{1}{h} [-\alpha_{I-1}^+ + 4\alpha_{I-1/2} + 3\alpha_I^-] - \frac{6}{h} \alpha(s_b) = 0 \end{array} \right.$$

où

$$\alpha_i^+ = \alpha(s_i^+), \quad \tilde{\psi}_i^+ = \tilde{\psi}(x_i, s_i^+, p_h(x_i + 0)) \text{ etc.}$$

Examinons les conditions aux bords. En a, on a soit la condition de Dirichlet, et  $s_a$  est connu, soit la condition de Neumann, et  $s_a$  peut être déterminé par :

$$(3.10) \quad \theta(s_a, s_1^+) + \frac{6}{h} \tilde{\psi}_1^+ \alpha(s_a) = \phi_{1,h}(a) + \frac{1}{h} \tilde{\psi}_1^+ \{3\alpha_1^+ + 4\alpha_{3/2} - \alpha_2\}$$

une fois que  $s_h$  et  $p_h$  sont connus, et où  $\theta$  est la fonction de (3.3).

Il en est de même pour les conditions en  $b$ . Pour plus de détails voir [3].

En utilisant la formule des trapèzes pour calculer les intégrales dans l'équation en pression (3.5) et (3.6), on a obtenu :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [ \phi(p_i) B_1(p_i) ( \frac{s_i^+ + s_{i+1}^-}{2} + s_{\min}) \\ + \phi(p_i) B_2(p_i) (s_{\max} - \frac{s_i^+ + s_{i+1}^-}{2}) ] \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$+ \frac{1}{h} (q_{0,i+1} - q_{0,i}) = 0$$

$$i = 1, \dots, I-1$$

et

$$\begin{aligned} (3.12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{h}{2} \frac{q_{0,1}}{\psi_1 d_1^+} + p_1 - p_a &= \frac{h}{2} \frac{1}{\psi_1} \sum_{j=1}^2 \gamma_{j,1}^+ q_{j,1} \\ \frac{h}{2} \frac{q_{0,i}}{\psi_i} ( \frac{1}{d_i^-} + \frac{1}{d_i^+} ) + p_i - p_{i-1} &= \frac{h}{2\psi_i} \sum_{j=1}^2 [ \gamma_{j,i}^- + \gamma_{j,i}^+ ] q_{j,i} \\ i &= 2, \dots, I-1 \\ \frac{h}{2} \frac{q_{0,I}}{\psi_I d_I^-} + p_b - p_{I-1} &= \frac{h}{2\psi_I} \sum_{j=1}^2 \gamma_{j,I}^- q_{j,I} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

où,  $\psi_i = \psi(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, I$ ,  $q_{j,i} = q_j(x_i)$   $i = 1, \dots, I$ ,  $j = 1, 2$  ;

$d_i^+ = d(x_i, p_i, \hat{s}_i^+)$ ,  $d_{i+1}^- = d(x_{i+1}, p_i, s_{i+1}^-)$ ,  $i = 1, \dots, I-1$ ,

et de la même façon pour  $\gamma_{j,i}^+$  et  $\gamma_{j,i}^-$   $j = 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, I-1$ .

Remarquons que en  $a$ , soit  $p_a$  soit  $q_{0,1}$  est connu, et en  $b$ ,

soit  $p_b$  soit  $q_{0,I}$  est connu.

Afin de mettre le schéma ci-dessus sous la forme matricielle, on note  $S$  le vecteur  $(s_1^+, s_2^-, s_2^+, \dots, s_I^-)$ ,  $R$  le vecteur  $(r_1, r_{3/2}, r_2, \dots, r_I)$ .

$P$  le vecteur  $(p_1, p_2, \dots, p_{I-1})$ , et  $Q$  le vecteur  $(q_{0,1}, q_{0,2}, \dots, q_{0,I})$ .

On utilise aussi la notation  $FIB_j(P) = (\phi(p_1) B_j(p_1), \phi(p_1) B_j(p_1) \cdot \phi(p_2) B_j(p_2), \phi(p_2) B_j(p_2), \dots, \phi(p_{I-1}) B_j(p_{I-1}), \phi(p_{I-1}) B_j(p_{I-1}))$ ,  $j = 1, 2$ , et

$A(S) = (\alpha_1^+, \alpha_{3/2}^-, \alpha_2^+, \alpha_2^-, \dots, \alpha_I^-)$ . Donc on peut récrire l'équation en saturation ((3.8), (3.9)) :

$$(3.13) \quad \mathcal{I}_1 \frac{\partial}{\partial t} [ FIB_1(P) (S - S_m) ] + \mathcal{D}_1 R = TR(S, P, Q)$$

$$(3.14) \quad \mathcal{D} \mathcal{C}_{A(S)} + \mathcal{A} \mathcal{R}(S, P) R = BC_S$$

et l'équation en pression ((3.11), (3.12)):

$$(3.15) \quad \mathcal{J}_0 \frac{\partial}{\partial t} \{ \text{FIB}_1 (P) (S + S_m) + \text{FIB}_2 (P) (S_M - S) \} \\ + \mathcal{D}_0 Q = 0$$

$$(3.16) \quad -\mathcal{D}_0^t P + \mathcal{M}_0 Q = \text{GCP} + \text{BC}_p$$

où  $S_m = (\text{smin}, \dots, \text{smin})$  et  $S_M = (\text{smax}, \dots, \text{smax})$  sont de longueur 2I-2, les produits  $\text{FIB}_1 (P) (S - S_m)$ , etc. sont faits composante par composante, et les matrices  $\mathcal{J}_1, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_0, \mathcal{A}R (S, P), \mathcal{J}_0, \mathcal{D}_0$ , et  $\mathcal{M}_0$  et ainsi que les vecteurs des membres de droite sont définis dans l'appendice 2.

#### IV - SCHEMA EN TEMPS

Dans la suite pour simplifier l'exposé on supposera qu'on a des conditions de Dirichlet aux deux extrémités de barreau aussi bien pour la pression que pour la saturation. Soit une discrétisation  $\{ t^1, \dots, t^N \}$  de l'intervalle  $J = [t^1, t^N]$ . On note comme d'habitude la valeur d'une fonction  $(.)$  à instant  $t^n$  par  $(.)^n$ , et on pose  $\Delta_t (.) = ((.)^{n+1} - (.)^n) / \Delta t$  où  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ .

On utilise une méthode IMPES, i.e., implicite en pression et explicite en saturation. L'idée est d'éliminer l'expression  $\Delta_t (S)$  dans l'équation implicite en pression en utilisant l'équation explicite en saturation et après avoir résolu l'équation en pression de mettre à jour la saturation explicitement.

Le schéma aux différences avancées pour l'équation en saturation (3.13), (3.14) s'écrit :

$$(4.1) \quad \mathcal{I}_1 \Delta_t [ \text{FIB}_1 (P) (S + S_m) ] + \mathcal{D}_1 R^n = \text{TR}(S^n, P^n, Q^n)$$

$$(4.2) \quad \mathcal{D} \mathcal{C}_A(S^n) + \mathcal{A} \mathcal{R}(S^n, P^n) R^n = \text{BC}_S^n$$

et le schéma aux différences retardées pour l'équation en pression (3.15), (3.16) s'écrit :

$$(4.3) \quad \mathcal{I}_0 \Delta_t [ \text{FIB}_1 (P) (S + S_m) + \text{FIB}_2 (P) (S_M - S) ] + \mathcal{D}_0 Q^{n+1} = 0$$

$$(4.4) \quad -\mathcal{D}_0^t P^{n+1} + \mathcal{M}(S^n, P^n) Q^{n+1} = \text{GCP}(S^n, P^n) + \text{BC}_P^{n+1}$$

où la matrice de coefficients  $\mathcal{M}(S, P)$  et le vecteur  $\text{GCP}(S, P)$  sont évalués avec les valeurs de  $S$  et  $P$  à l'instant précédent car ils dépendent de  $S$  aussi bien que de  $P$ .

Le premier terme dans (4.3) peut être remplacé par l'expression :

$$\mathcal{I}_0 [ (\text{FIB}_1(P^{n+1}) - \text{FIB}_2(P^{n+1})) \Delta_t(S) + \Delta_t(\text{FIB}_1(P))(S^n + S_m) + \Delta_t(\text{FIB}_2(P))(S_M - S^n) ].$$

En remplaçant  $\Delta_t(S)$  dans l'expression ci-dessus par sa valeur extraite de (4.1) :

$$(4.5) \quad \Delta_t(S) = \text{FIB}_1^{-1}(P^{n+1}) [ -\Delta_t \text{FIB}_1(P) (S^n + S_m) + \mathcal{I}_1^{-1} (-\mathcal{D}_1 R^n + \text{TR}(S^n, P^n, Q^n)) ]$$

on obtient,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 [ & \text{FIB}_2(P^{n+1}) \text{FIB}_1^{-1}(P^{n+1}) \Delta_t(\text{FIB}_1(P))(S^n + S_m) \\ & + \Delta_t(\text{FIB}_2(P^{n+1}))(S_M - S^n) \\ & + (1_{2I-2} - \text{FIB}_2(P^{n+1}) \text{FIB}_1^{-1}(P^{n+1})) \mathcal{I}_1^{-1} \{-\mathcal{D}_1 R^n + \text{TR}(S^n, P^n, Q^n)\} ] \end{aligned}$$

où  $1_{2I-2} = (1, \dots, 1)$  est de longueur  $2I-2$ .

(Notons que  $\text{FIB}_1(P^{n+1})$  ne peut pas avoir de composante nulle et qu'on peut donc effectivement écrire  $\text{FIB}_1^{-1}(P^{n+1})$ .)

Donc (4.3) devient :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{I}_0 [ \text{FIB}_2(P^{n+1}) \text{FIB}_1^{-1}(P^{n+1}) \text{FIB}_1' (S^n + S_m) \\
 & + \text{FIB}_2' (S_m - S^n) ] \Delta_t(P) + \mathcal{D}_0 Q^{n+1} \\
 (4.6) \quad & = -\mathcal{I}_0 [(1_{2I-2} - \text{FIB}_2(P^{n+1}) \text{FIB}_1^{-1}(P^{n+1})) \\
 & * \mathcal{I}_1^{-1} \{-\mathcal{D}_1 R^n + \text{TR}(S^n, P^n, Q^n)\}]
 \end{aligned}$$

où  $\text{FIB}_j'$  est le vecteur obtenu de  $\text{FIB}_j(P)$  en dérivant par rapport à  $P$ ,  $j = 1, 2$ .

Maintenant on identifie le coefficient de  $\Delta_t(P)$  à une matrice diagonale qu'on appelle  $\mathcal{A}(P^{n+1})$ . De plus en appelant MD1 le membre de droite dans (4.4) moins  $\mathcal{M}(S^n, P^n)Q^n$  plus  $\mathcal{D}_0^t P^n$ , et MD2( $P^{n+1}$ ) le membre de droite dans (4.6) moins  $\mathcal{D}_0 Q^n$ , on peut écrire le système (4.4), (4.6) comme un système en  $\Delta_t(P)$  et  $\Delta_t(Q)$  :

$$(4.7) \quad \mathcal{M}(S^n, P^n) \Delta_t(Q) - \mathcal{D}_0^t \Delta_t(P) = \text{MD1}$$

$$(4.8) \quad \mathcal{D}_0 \Delta_t(Q) + \mathcal{A}(P^{n+1}) \Delta_t(P) = \text{MD2}(P^{n+1}).$$

Donc connaissant toutes les variables à l'instant  $n$  on les calcule à l'instant  $n+1$  de la façon suivante. On obtient  $P^{n+1}$  et  $Q^{n+1}$  en résolvant le système (4.7), (4.8), puis on obtient  $S^{n+1}$  en utilisant (4.5)



et  $R^{n+1}$  grâce à (4.2). Remarquons que comme  $\mathcal{A}$  est diagonale et  $\mathcal{I}_1$  peut être inversée à la main, pour calculer  $S^{n+1}$  et  $R^{n+1}$  on n'a pas de système linéaire à résoudre.

### Résolution du problème algébrique

Pour résoudre le système (4.7), (4.8), comme les coefficients dépendent de  $P^{n+1}$ , on utilise des itérations de point fixe, i.e. on résout le système :

$$(4.9) \quad \mathcal{M}_0(S^n, P^n) (\Delta_t(Q))^{(k+1)} - \mathcal{D}_0^t (\Delta_t(P))^{(k+1)} = MD1$$

$$(4.10) \quad \mathcal{D}_0 (\Delta_t(Q))^{(k+1)} + \mathcal{A}^{(k)} (\Delta_t(P))^{(k+1)} = MD2^{(k)}$$

en initialisant avec  $(\Delta_t(P))^{(0)} = 0$ , et où  $\mathcal{A}^{(k)} = \mathcal{A}(P^n + (\Delta_t(P))^{(k)})$  etc. Après convergence on pose  $P^{n+1} = P^n + (\Delta_t(P))^{(k+1)}$  et  $Q^{n+1} = Q^n + (\Delta_t(Q))^{(k+1)}$ .

Quant au système linéarisé (4.9), (4.10), observons que  $\mathcal{A}^{(k)}$  est diagonale et supposons que même si les coefficients diagonaux de  $\mathcal{A}^{(k)}$  sont très petits, ils ne s'annulent jamais vraiment. Or on a :

$$(4.11) \quad (\Delta_t(P))^{(k+1)} = (\mathcal{A}^{(k)})^{-1} (MD2^{(k)} - \mathcal{D}_0^t (\Delta_t(Q))^{(k+1)})$$

et

$$(4.12) \quad (\mathcal{M}_0(S^n, P^n) + \mathcal{D}_0^t (\mathcal{A}^{(k)})^{-1} \mathcal{D}_0) (\Delta_t(Q))^{(k+1)} = MD1 + \mathcal{D}_0^t (\mathcal{A}^{(k)})^{-1} MD2.$$

La matrice  $M(s^n, p^n) + D_0^t A^{(k)} - 1 D_0$  est tridiagonale et définie positive. On calcule donc  $(\Delta_t(Q))^{(k+1)}$  dans (4.12) en utilisant l'élimination de Gauss et  $(\Delta_t(P))^{(k+1)}$  est calculé avec (4.11).

Remarque 1 :

En supposant que les coefficients diagonaux de  $A$  ne sont jamais zéro, on impose la restriction que soit  $\text{smín}$  est non nul, soit la compressibilité de fluide 2 est non nulle, i.e.  $B'_2$  n'est pas zéro. Dans notre test on a remplacé le cas de compressibilité zéro par une compressibilité de l'ordre  $10^{-12}$  et l'algorithme a bien fonctionné.

Remarque 2 :

D'un autre côté on a résolu le système (4.7), (4.8) en combinant les itérations de point fixe avec une itération de la méthode du Lagrangien augmenté [6] pour (4.9), (4.10). Mais, avec nos données, sans essayer toutefois d'optimiser le paramètre de descente, i.e. en choisissant seulement celui-ci égal au paramètre d'augmentation du Lagrangien, on n'a pas réussi à converger en moins d'environ 20 itérations, tandis que 2 ou 3 itérations seulement sont suffisantes avec la méthode que nous avons décrite.

Remarque 3 :

La loi de conservation satisfaite par notre méthode est

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Delta_t \{ \phi(p_h) B_1(p_h) (s_h + s_{min}) \} dx = \Delta t \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} \phi_{1,h}^n dx,$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Delta_t \{ \phi(p_h) B_2(p_h) (s_{max} - s_h) \} dx = \Delta t \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} (q_{0,h}^{n+1} - \phi_{1,h}^n) dx,$$

ou  $\phi_{1,h}^n = r_h^n + f(s_h^n, \tilde{p}_h^n, q_{0,h}^n).$

Cette loi va être satisfaite tant que l'approximation  $FIB'_j \Delta_t(P)$  à  $\Delta_t(FIB_j(P))$ ,  $j = 1, 2$ , est précise. Dans les cas de nos tests numériques,

$B_j$  est une fonction linéaire de  $p$  et il n'y a pas de problème.

Plus généralement, il faut poser :

$$FIB'_j = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{FIB_j(P^n) - FIB_j(P^{n-1})}{P^n - P^{n-1}} & \text{à la première} \\ & \text{itération de point-} \\ & \text{fixe} \\ \\ \frac{FIB_j(P^{n+(\Delta P)^{(k)}}) - FIB_j(P^n)}{(\Delta P)^{(k)}} & \text{pour les autres} \\ & \text{itérations.} \end{array} \right.$$

Remarque 4 :

Observons qu'on arriverait au même schéma (4.1), (4.2), (4.7), (4.8) si on discrétisait d'abord en temps et après en espace pourvu qu'on discrétise les termes, qui apparaissent dans l'équation en pression lors de la substitution de  $\Delta_t(S)$  par sa valeur extraite de l'équation en saturation, de la même façon qu'on les a discrétisés dans l'équation en saturation. Cela est nécessaire aussi pour que le schéma reste conservatif. En particulier le terme avec  $f$  doit être approché avec le schéma de Godunov c.a.d.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} f(s_h, p_h, q_{0,h}) w \, dx \approx (f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)) w(x_{i+1/2})$$

pour  $w \in X_h^0$ ,  $i = 1, \dots, I - 1$ .

Remarque 5 :

Le schéma IMPES standard consisterait à remplacer  $TR(S^n, P^n, Q^n)$  dans (4.1), et donc dans (4.6), par  $TR(S^n, P^n, Q^{n+1})$ . Dans le schéma standard  $\phi_1$  serait approché par  $r^n + f^{n+1}$ , ou plus précisément

$$r^n + f(s_h^n, p_h^n, q_{0,h}^{n+1}) = r^n + b_0(s_h^n, p_h^n) q_{0,h}^{n+1} + \sum_{j=1}^2 b_j(s_h^n, p_h^n) q_j.$$

Pour notre schéma en espace, comme le vecteur  $TR(S, P, Q)$  dépend des valeurs de Godunov qui dépendent de  $Q$ , il serait très coûteux de vouloir évaluer  $TR$  avec  $Q^{n+1}$ , car cela augmenterait beaucoup le temps de calcul de chaque itération. Evidemment on peut penser ici à l'idée

d'utiliser une valeur  $\overline{Q}^{n+1}$  extrapolée des valeurs de  $Q^n$  et  $Q^{n-1}$ , pour calculer TR. Cependant, dans notre cas, cela n'a amélioré ni la stabilité ni la précision par rapport à la méthode consistant à calculer TR avec  $Q^n$ .

## V - RESULTATS NUMERIQUES

### 5.1 - Les données

On a utilisé des données relatives à une expérience de drainage gaz-huile dans un barreau poreux constitué de grès fin, un peu argileux et friable, dont les caractéristiques sont :

Longueur	$b-a$	=	25.1 cm
Section constante	$\sigma$	=	43.83 cm <sup>2</sup>
Porosité constante	$\phi$	=	.305
Perméabilité absolue constante	$k$	=	$3.079 \times 10^{-9}$ cm <sup>2</sup> .

Le barreau est vertical et on étudie des déplacements de l'huile qui y est contenue par du gaz injecté à travers son extrémité supérieure,  $x = a$ . Initialement le barreau est imbibé d'huile à 67.3% dont 19% irréductible, et d'eau irréductible à 32.7%.

Les caractéristiques des deux fluides sont pour le gaz :

$$\begin{aligned}\text{viscosité } \mu_1 &= 1.83 \times 10^{-4} \text{ poise} \\ \text{densité } \rho_1(p) &= 1.213 \times 10^{-3} + 1.197 \times 10^{-9} (p-p_r) \text{ g/cm}^3\end{aligned}$$

et pour l'huile :

$$\begin{aligned}\text{viscosité } \mu_2 &= 1.25 \times 10^{-1} \text{ poise} \\ \text{densité } \rho_2(p) &= 8.28 \times 10^{-1} + 1.0 \times 10^{-13} (p-p_r) \text{ g/cm}^3\end{aligned}$$

où la pression de référence  $p_r$  est la pression atmosphérique.

Pendant l'expérience, le gaz est injecté à la pression  $p_r + \Delta p_r$ ,  $\Delta p_r = 2.07 \times 10^5$  baryes et l'ensemble gaz-huile est récupéré à la pression atmosphérique,  $p_r$ . Ces conditions se traduisent par les conditions initiales et aux limites suivantes :

en saturation :

$$\text{à } t = 0 \quad s(x,0) = 0 \quad x \in [a,b]$$

$$\text{en } x = a \quad \phi_{ad} = q_0(a) \quad t \geq 0$$

$$\text{en } x = b \quad s_{bd} = s_c = 0 \quad t \geq 0$$

en pression :

$$\text{à } t = 0 \quad p(x,0) = p_r + 8.28 \times 10^{-1} * g * (x-b), \quad x \in (a,b)$$

$$\text{en } x = a \quad p_{ad} = p_r + \Delta p_r + \left[ \gamma(s,p) - \frac{1}{2} p_c(s) \right] P_{CM} \quad t \geq 0$$

$$\text{en } x = b \quad p_{bd} = p_r \quad t \geq 0.$$

La condition en pression en  $x = a$  signifie simplement que la pression globale est continue en  $x = a$ , cf. appendice 3.

Les perméabilités relatives et la pression capillaire normalisée sont données comme fonctions de la saturation réduite en gaz dans la table 1 et représentées sur les figures 1 et 2. La pression capillaire maximale est constante  $P_{CM}(x) = 50\,000$  baryes, et donc  $q_1(x) \equiv 0$ .

TABLE 1 : Perméabilités Relatives Et Pression Capillaire

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S	0.	0.103	0.207	0.311	0.414	0.518	0.621	0.725	0.828	0.932	1.000
$k_{r1}$	0.	0.01	0.02	0.04	0.0675	0.105	0.145	0.21	0.31	0.425	0.535
$k_{r2}$	1.	0.575	0.365	0.225	0.13	0.065	0.03	0.01	0.005	0.	0.
$P_c$	0.	0.52	0.68	0.76	0.78	0.80	0.84	0.86	0.92	0.96	1.

$$P_{CM}(x) = 50\,000 \text{ baryes.}$$



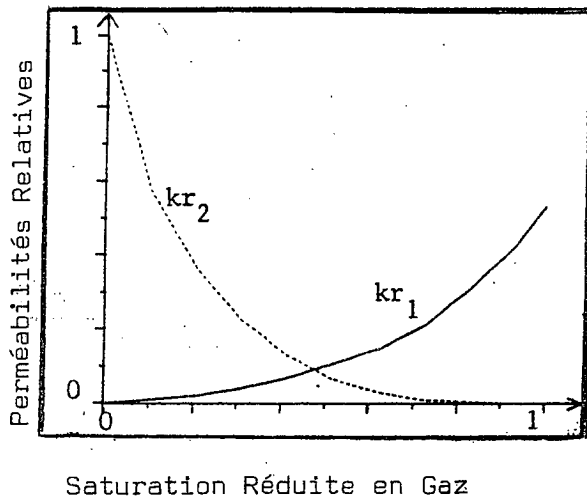


FIGURE 1 :

Perméabilités Relatives

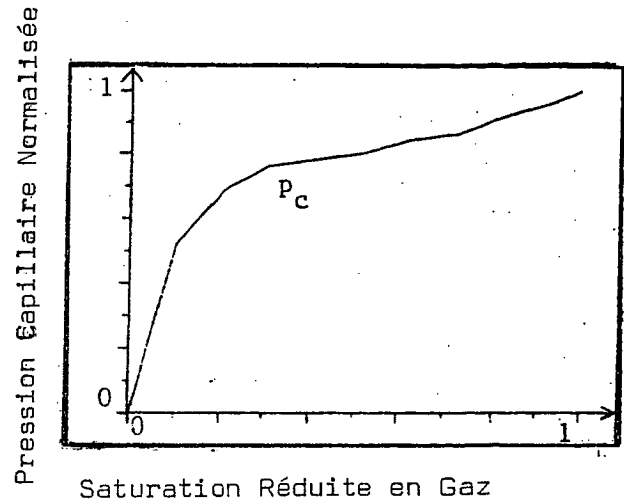
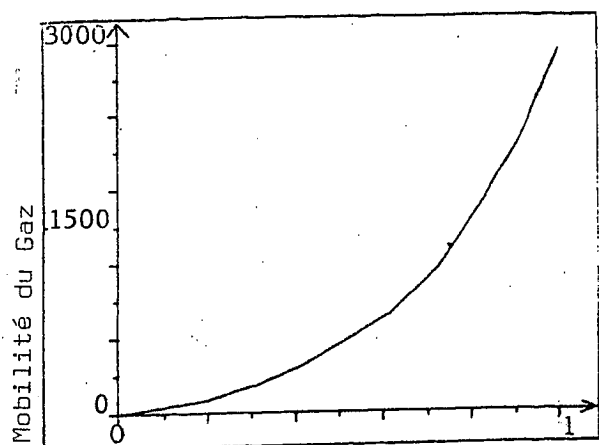


FIGURE 2 :

Pression Capillaire Normalisée

Les fonctions des mobilités à la pression atmosphérique sont représentées sur les figures 3 et 4. On observe que le rapport de mobilité maximum du gaz à l'huile est 362, ce qui est très élevé et rend l'expérience difficile à simuler. La fonction  $\alpha$  est donnée sur la figure 5. Les fonctions  $b_0$ ,  $b_1$ , et  $b_2$  dépendent simultanément de la saturation et de la pression mais comme  $q_1$  est identiquement nul,  $b_1$  est sans objet. Sur les figures 6, 7 représentant  $b_0$  et  $b_2$  on remarque que ces fonctions ne dépendent que faiblement de la pression pour les valeurs de la saturation supérieures à 0.3. En fait, cette valeur est dépassée très rapidement après la percée du gaz à l'extrémité inférieure.

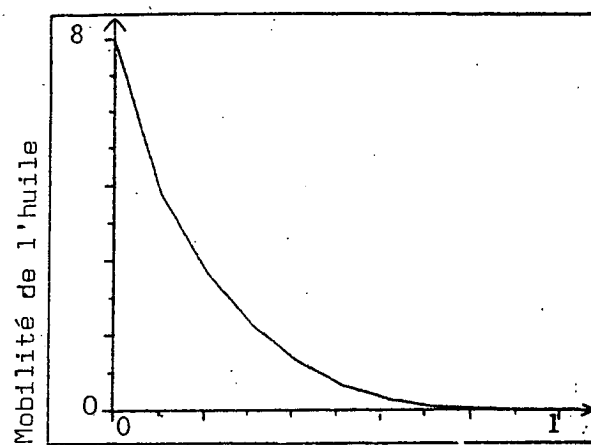
Pour ce qui concerne la fonction de transport  $f$ , elle est représentée sur la figure 8 pour une faible valeur de  $q_0$  et sur la figure 9 pour des valeurs plus fortes. On souligne qu'elle est non monotone dans le premier cas dans les zones du barreau à faible saturation en gaz.



Saturation Réduite en Gaz

FIGURE 3 :

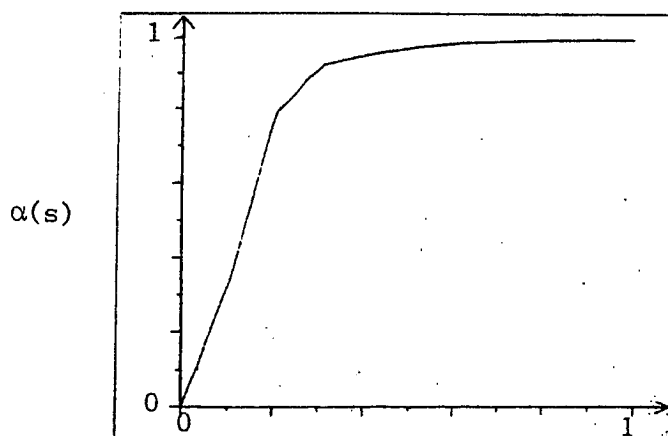
Mobilité du gaz à la pression  
de référence



Saturation Réduite en Gaz

FIGURE 4 :

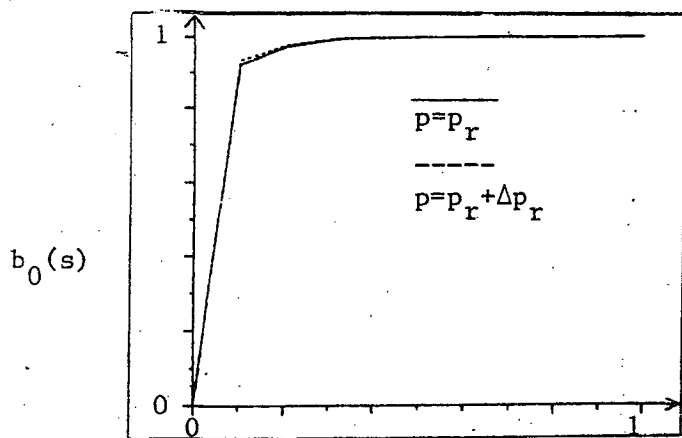
Mobilité de l'huile à la pression  
de référence



Saturation Réduite en Gaz

FIGURE 5 :

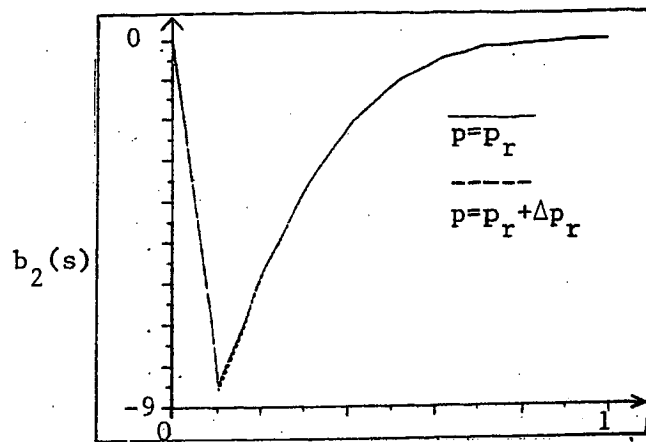
La Fonction  $\alpha$



Saturation Réduite en Gaz

FIGURE 6 :

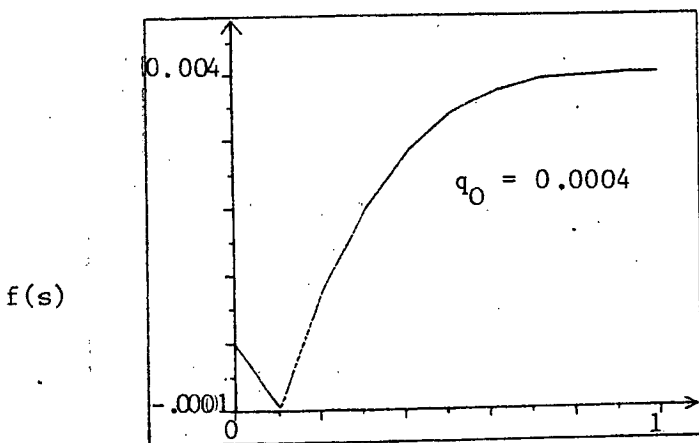
Le "Fractional Flow"  $b_0$  —  
pour les valeurs extrêmes de la  
pression



Saturation Réduite en Gaz

FIGURE 7 :

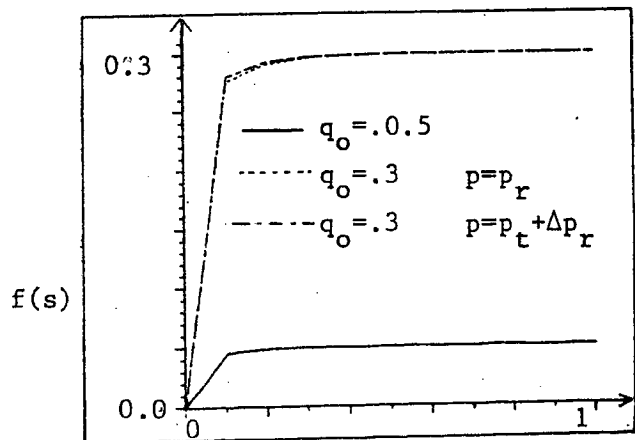
La Fonction  $b_2$  pour les  
valeurs extrêmes de la pression



Saturation Réduite en Gaz

FIGURE 8 :

La fonction de transport  $f$   
pour  $q_0$  petit



Saturation

FIGURE 9 :

La fonction de transport  $f$   
pour  $q_0$  plus grand

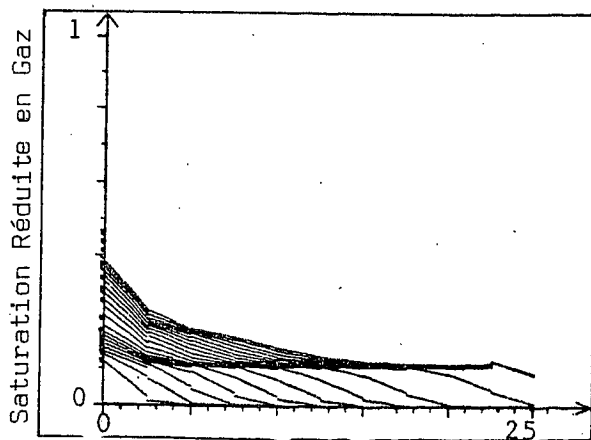
## 5.2 - Les résultats

Les résultats décrits ci-dessus ont été obtenus après avoir discrétisé l'intervalle  $[a,b]$  en 10 intervalles de longueur  $\Delta x = (b-a)/10 = 2.51$ .

Les courbes de saturation donnent d'importantes informations sur le phénomène qu'on simule. Sur la figure 10, on représente les profils de saturation à des intervalles de temps équidistants pour une simulation de 2309.2 secondes. La percée, i.e. le moment où le gaz commence à sortir par l'extrémité de production, a eu lieu à 1039 secondes. Le gaz injecté par l'extrémité supérieure du barreau, s'accumule au voisinage de celle-ci, i.e. dans la partie gauche de la figure. Les profils de saturation présentent des fronts qui se déplacent de l'extrémité d'injection vers l'extrémité de production. Les fronts ont une hauteur constante (environ 0.1) et sont adoucis par la diffusion capillaire ( $P_{CM}(x) = 50\ 000$  baryes).

Ily a discontinuité entre les saturations à l'intérieur du barreau et la trace de la saturation  $s_a$  en  $x = a$ , et aussi avec la trace  $s_b = 0$  en  $x = b$  mais seulement après la percée pour cette dernière.

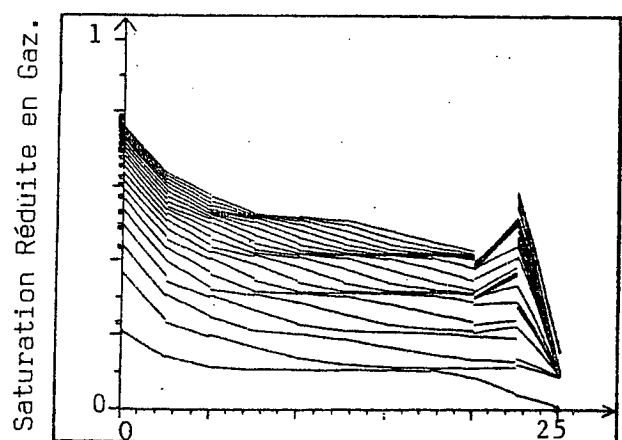
La figure 11 montre les profils de saturation quand la simulation a été poussée jusqu'à 20783 secondes, cad. 20 fois la date de percée. On observe que les saturations n'augmentent que lentement car le gaz sort du barreau par l'extrémité de production presque aussi vite qu'il est injecté par l'extrémité d'injection. On observe aussi la formation d'une couche limite en  $x = b$  car la condition au bord en  $x = b$  fixe la saturation  $s_b$  à 0 alors que le barreau se remplit doucement de gaz.



Abscisse Le Long Du Barreau

FIGURE 10 :

Saturation au cours du temps  
(Intervalle de temps entre  
deux courbes 115 sec. )



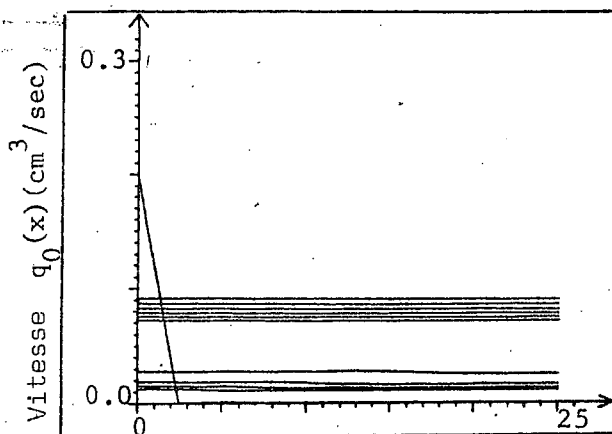
Abscisse Le Long Du Barreau

FIGURE 11 :

Saturation au cours du temps  
(Intervalle de temps entre  
deux courbes 1039 sec. )

Les figures 12 et 13 représentent les vitesses dans le barreau à différents instants. On constate que mis à part les tout premiers instants de la simulation où la vitesse est grande à l'extrémité d'injection, la vitesse devient très rapidement presque constante dans le barreau. Cela traduit le fait que en dehors des tout premiers instants, l'expérience est très peu compressible.

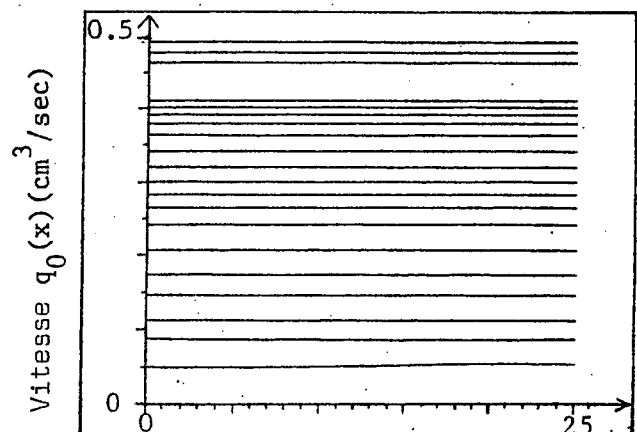
Par ailleurs, les vitesses augmentent dans le barreau au cours du temps car la "mobilité"  $d$  de l'ensemble des deux fluides augmente au fur et à mesure que la saturation en gaz augmente, puisque le gaz est plus mobile que l'huile. La discontinuité en temps des vitesses constatée sur la figure 12 correspond à la percée du gaz.



Abscisse Le Long Du Barreau

FIGURE 12 :

Vitesse au cours du temps  
(Intervalle de temps entre deux courbes 230 sec.)

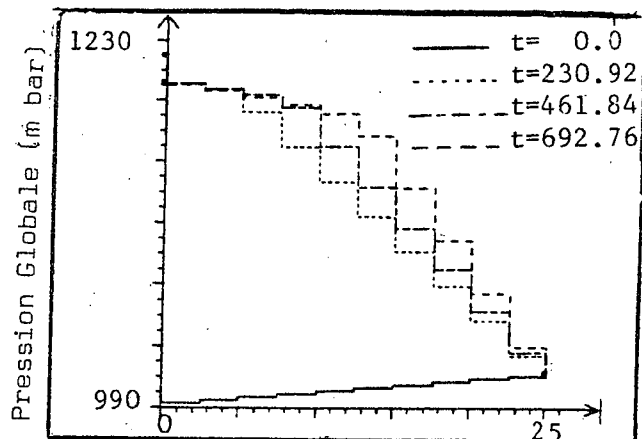


Abscisse Le Long Du Barreau

FIGURE 13 :

Vitesse au cours du temps  
(Intervalle de temps entre deux courbes 1039 sec.)

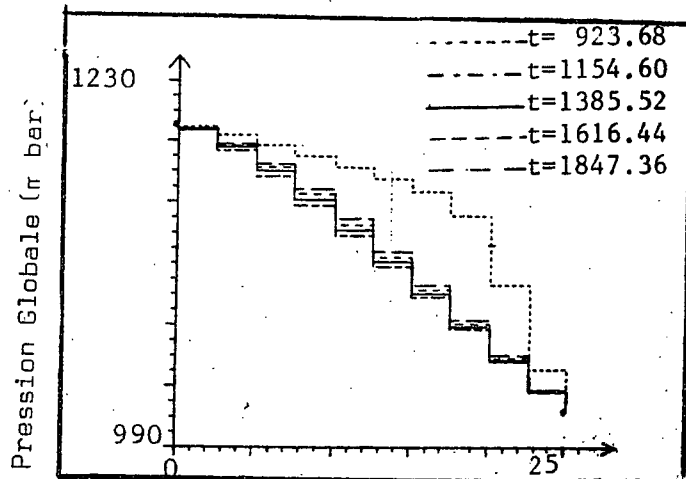
Les figures 14 et 15 représentent les profils de pression à divers instants. Sur la figure 14, on observe que le profil de pression change brutalement au début de l'expérience. Puis, les pressions augmentent jusqu'à la percée, chutent ensuite, puis réaugmentent doucement.



Abscisse Le Long Du Barreau

FIGURE 14 :

Pression au cours du temps  
(Intervalle de temps entre  
deux courbes 230 sec.).

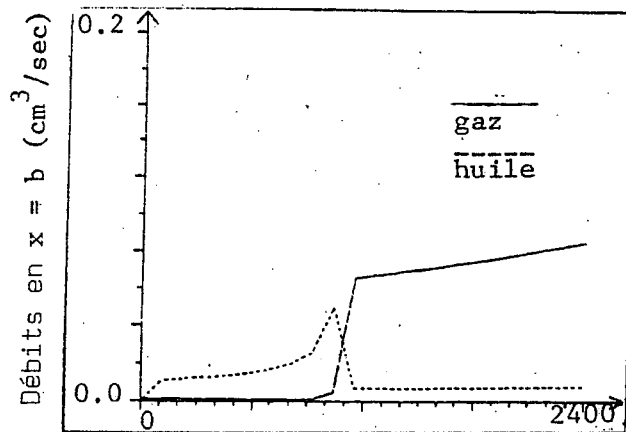


Abscisse Le Long Du Barreau

FIGURE 15 :

Pression au cours du temps  
(Intervalle de temps entre  
deux courbes 230 sec.).

Les courbes des débits à l'extrémité de production sont représentées sur la figure 16. On y voit que le débit d'huile grandit juste avant la percée puis tombe fortement après, pour rester ensuite presque constant à un faible niveau alors que le débit du gaz croît légèrement.

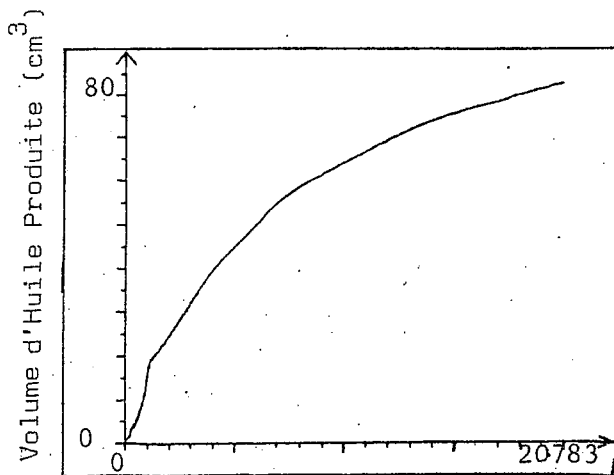


Tems (secondes)

FIGURE 16 :

Débits en  $x = b$

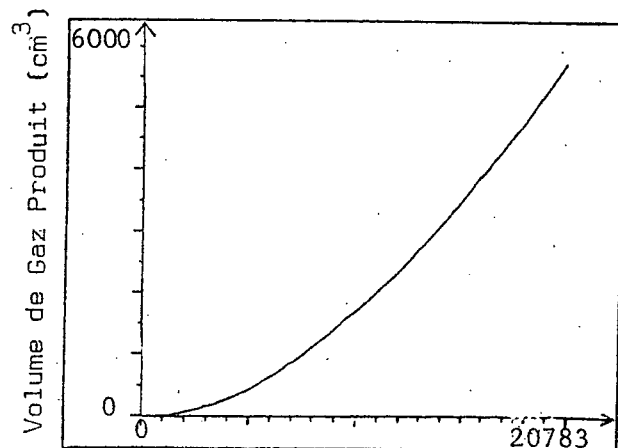
Les figures 17 et 18 représentent respectivement les volumes d'huile et de gaz produits. On notera la différence d'échelle en volume entre les deux dessins. Il y a beaucoup plus de gaz produit que d'huile. En d'autres termes, le gaz traverse le barreau en ne déplaçant que très peu d'huile.



Tems (secondes)

FIGURE 17 :

Volume d'huile produite



Tems (secondes)

FIGURE 18 :

Volume de gaz produit

Il y a une très bonne correspondance entre ces résultats et ceux de l'expérience de laboratoire. Concernant la conservation des masses, les bilans en masse pour chacun des deux fluides sont de l'ordre de  $10^{-6}$  en valeur relative.

### 5.3 - Choix du pas de temps et temps de calcul :

Pour ce qui concerne le pas de temps, avec la discrétisation en espace décrite en 5.2, on a observé que :

i) Jusqu'à deux fois la date de percée ( $t = 2078$  sec.), le schéma est stable avec  $\Delta t = .502$  sec., i.e.  $\Delta t / \Delta x = 0.2$ .

ii) entre deux fois et quatre fois la date de percée ( $2078 \text{ sec.} \leq t \leq 4156 \text{ sec.}$ ) le schéma est stable avec  $\Delta t = 1.004$  sec., i.e.  $\Delta t / \Delta x = 0.4$ .

iii) entre quatre fois et dix sept fois la date de percée ( $4156 \text{ sec.} \leq t \leq 17664 \text{ sec.}$ ) le schéma est stable avec  $\Delta t = 1.506$  sec., i.e.  $\Delta t / \Delta x = 0.6$ .  
Au delà, le pas de temps doit être réduit à cause de la formation de la couche limite.

Ces contraintes de stabilité doivent être appréciées en se rappelant qu'on simule ici une expérience difficile au rapport de mobilité très élevé (362).

Une méthode de pilotage du pas de temps automatique a retrouvé sensiblement les mêmes pas de temps.

Ces résultats représentent un progrès important par rapport à un schéma complètement explicite, en multipliant par 40 les pas de temps admissibles. Cela a été obtenu sans augmenter de façon notable le temps de calcul par pas de temps.



En fait, le temps de calcul est consacré essentiellement à l'évaluation des fonctions non linéaires et le programme devra être optimisé. Pour le moment un pas de temps occupe environ 0.5 sec. sur H.B. DPS 68 MULTICS.

#### 5.4 - Effet de la discrétisation en saturation des fonctions non linéaires :

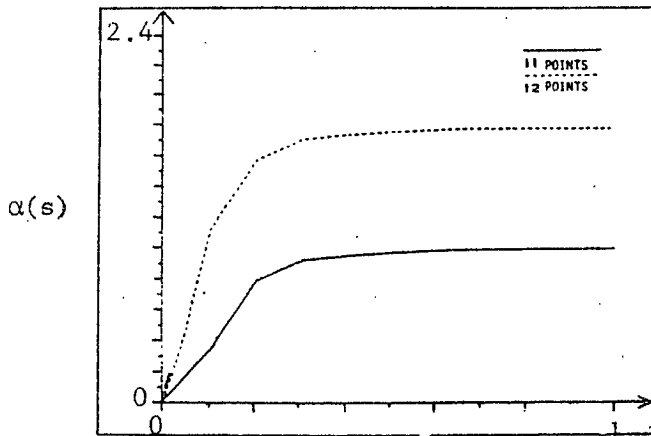
En observant attentivement les figures 10 et 11, on constate des paliers correspondant aux valeurs de la saturation où ont été discrétisées les fonctions non linéaires. Pour montrer la sensibilité de la simulation à cette discrétisation des fonctions non linéaires, on a ajouté un point aux perméabilités relatives et à la pression capillaire.

TABLE 2 : Perméabilités relatives et pression capillaire (le deuxième point a été ajouté à la Table 1)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S	0.0	0.052	0.103	0.207	0.311	0.414	0.518	0.621	0.725	0.828	0.932	1.0
$K_{r1}$	0.0	0.004	0.01	0.02	0.04	0.0675	0.105	0.145	0.21	0.31	0.425	0.535
$K_{r2}$	1.0	0.760	0.575	0.365	0.225	0.13	0.065	0.03	0.01	0.005	0.0	0.0
$P_c$	0.0	0.32	0.52	0.68	0.76	0.78	0.80	0.84	0.86	0.92	0.96	1.0

La courbe  $\alpha$  (cf. fig. 19) a été considérablement modifiée. Cet ajout a augmenté beaucoup la diffusion capillaire. Pour le "fractional flow"  $b_0$  (cf. fig. 20), la saturation de Welge, qui fixe la hauteur des fronts de saturation avant la percée et qui coïncide ici avec le premier point de discrétisation, a été abaissée. On voit alors sur la figure 21 (à comparer avec la figure 10) que le premier palier s'est encore formé à la nouvelle saturation de Welge, et les fronts sont moins raides du fait de l'augmentation de la diffusion capillaire.

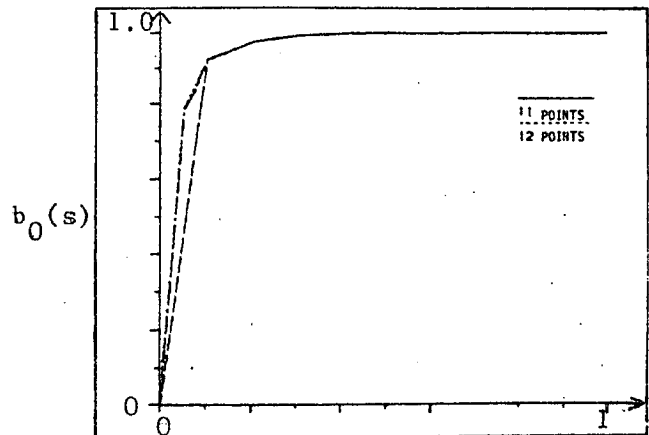
La percée se passe plus en douceur comme on le voit sur la figure 22 (à comparer avec la figure 12), où la discontinuité des vitesses est plus faible et sur la figure 23 (à comparer avec la figure 16) où les débits varient moins brutalement à la percée. De plus, la quantité d'huile produite est moins grande.



Saturation Réduite en Gaz

FIGURE 19 :

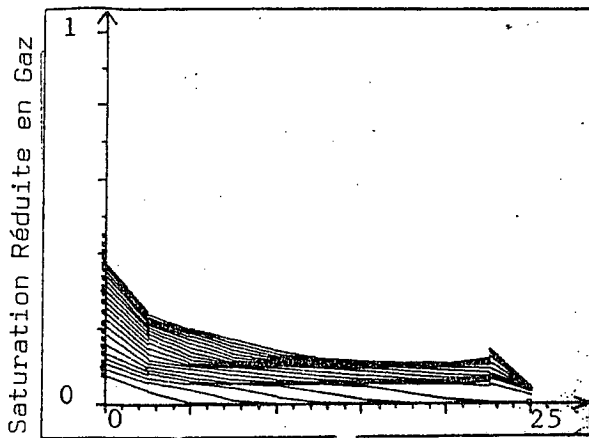
La fonction  $\alpha$  avec des discrétisations différentes en saturation.



Saturation Réduite en Gaz

FIGURE 20 :

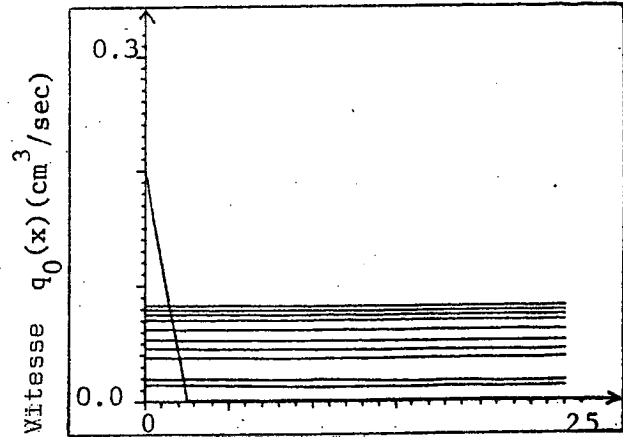
Le "fractional flow"  $b_0$  avec des discrétisations différentes en saturation.



Abscisse Le Long Du Barreau

FIGURE 21

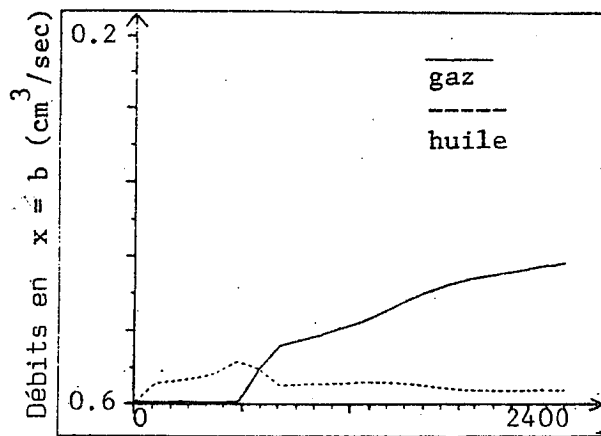
Saturation au cours du temps.  
(Intervalle entre deux courbes  
115 sec).



Abscisse Le Long Du Barreau

FIGURE 22

Vitesse au cours du temps  
(Intervalle entre deux courbes  
230 sec).



Temps (secondes)

FIGURE 23 :

Débits en  $x = b$

Pour conclure ce paragraphe, il faut ajouter que ayant constaté la sensibilité des résultats aux points où sont données les fonctions non linéaires, il est important de se souvenir que le temps de calcul est lui aussi très sensible au nombre de ces points, au moins si l'on n'utilise pas de tables équidistantes, car ces fonctions sont évaluées un très grand nombre de fois.

#### IV - CONCLUSION :

Après avoir présenté la formulation en pression globale des écoulements diphasiques compressibles, on a décrit l'approximation en espace basée sur des techniques de décentrage discontinu pour les termes de transport et sur les éléments finis mixtes. On a ensuite présenté un schéma en temps de type IMPES qui a permis d'accroître d'environ 40 fois les pas de temps par rapport à un schéma tout explicite, sans augmentation du temps de calcul par pas de temps et on a ainsi montré la faisabilité de la méthode.

#### REMERCIEMENTS

Nous remercions G. CHAVENT, G. COHEN et J. JAFFRE pour les utiles conversations que nous avons eues avec eux et Y. GOLDMAN pour l'aide informatique qu'il nous a donné.

## REFERENCES

- [1] K. AZIZ , A. SETTARI , *"Petroleum Reservoir Simulation"*,  
Applied Science Publishers LTD; London, 1979.
- [2] G. CHAVENT , *"The global pressure, a new concept for the modeli-  
zation of compressible two phase flow in porous media"*,  
Flow and Transport in Porous Media. A. Verruyt and FBJ.  
Varends eds., Balkema, Rotterdam, 1981 .
- [3] G. CHAVENT , G. SALZANO , *"A finite element method for the 1-D  
water flooding problem with gravity"*,  
J. Comput. Physics, 45(3), 1982.
- [4] G. COHEN, *"Eléments finis mixtes appliqués à un problème d'écoule-  
ment diphasique incompressible bidimensionnel en milieu poreux en  
présence de gravité"*,  
Rapport INRIA n° 138, INRIA, Le Chesnay, 1982.
- [5] J. DOUGLAS Jr., J.E. ROBERTS , *"Numerical methods for a model for  
compressible miscible displacement in porous media"*,  
à paraître dans Math. Comp.
- [6] M. FORTIN , R. GLOWINSKI , *"Méthodes de Lagrangien Augmenté"*,  
Dunod, Paris 1982.

- [7] J. JAFFRE, *"Formulation mixte d'écoulements diphasiques incompressibles dans un milieu poreux"*,  
Rapport INRIA n° 37 , INRIA, Le Chesnay, 1980.
  
- [8] P. LESAIN, P.A. RAVIART , *"On a finite element method for solving the neutron transport equation"*,  
Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, Ed. Carl de Boor, Academic Press, 1974.
  
- [9] G. SALZANO, *"Résolution numérique d'un déplacement diphasique en milieu poreux en présence de gravité et de forces capillaires"*,  
Rapport INRIA n° 2, INRIA, Le Chesnay , 1980.

## APPENDICE 1 : Notations

### Constantes :

$a, b$	=	abscisse des extrémités du barreau
$g$	=	accélération de la pesanteur
$s_c$	=	saturation réduite du fluide 1 pour laquelle la pression capillaire est nulle (quand le fluide 1 est le fluide non mouillant $s_c$ est habituellement 0 )
$\bar{s}_m$	=	saturation irréductible du fluide 1
$\bar{s}_M$	=	saturation maximale du fluide 1
$s_{min}$	=	$\bar{s}_m / (\bar{s}_M - \bar{s}_m)$
$s_{max}$	=	saturation maximale du fluide 2 / $(\bar{s}_M - \bar{s}_m)$
$p_r$	=	pression de référence
$\rho_{j0}$	=	densité du fluide $j$ à la pression de référence, $j = 1, 2$
$\mu_{j0}$	=	viscosité du fluide $j$ à la pression de référence, $j = 1, 2$
$I$	=	nombre de points de discrétisation de $[a, b]$

Fonctions d'espace  $x$  :

- $Z(x)$  = profondeur
- $\sigma(x)$  = section du barreau
- $K(x)$  = perméabilité absolue de la roche à  $x$
- $\psi(x)$  =  $\sigma(x) K(x)$
- $P_{CM}(x)$  = pression capillaire maximum à  $x$
- $q_1(x)$  =  $-\psi(x) \text{ grad } P_{CM}(x)$
- $q_2(x)$  =  $-\psi(x) 1/2(\rho_{10} + \rho_{20})g \text{ grad}(-Z(x))$
- $s_0(x)$  = saturation réduite du fluide 1 à  $x$  au temps initial
- $s_{0h}(x)$  = approximation numérique de  $s_0(x)$
- $p_0(x)$  = pression globale à  $x$  au temps initial
- $p_{0h}(x)$  = approximation numérique de  $p_0(x)$

Fonctions du temps  $t$  :

- $s_a$  = approximation numérique de la trace de la saturation  $s$  en  $x = a$
- $s_b$  = approximation numérique de la trace de la saturation  $s$  en  $x = b$
- $s_{ad}$  = condition au bord de Dirichlet en saturation en  $x = a$
- $s_{bd}$  = condition au bord de Dirichlet en saturation en  $x = b$



- $\phi_{ad}$  = condition au bord de Neumann en saturation en  $x = a$
- $\phi_{bd}$  = condition au bord de Neumann en saturation en  $x = b$
- $p_a$  = approximation numérique de la trace de la pression  $p$  en  $x = a$
- $p_b$  = approximation numérique de la trace de la pression  $p$  en  $x = b$
- $p_{ad}$  = condition au bord de Dirichlet en pression en  $x = a$
- $p_{bd}$  = condition au bord de Dirichlet en pression en  $x = b$
- $q_{ad}$  = condition au bord de Neumann en pression en  $x = a$
- $q_{bd}$  = condition au bord de Neumann en pression en  $x = b$

Fonctions de  $x$  et  $t$  :

- $\bar{s}_1(x,t)$  = saturation du fluide 1 à  $x$  au temps  $t$
- $\bar{s}_2(x,t)$  = saturation du fluide 2 à  $x$  au temps  $t$
- $s(x,t) = (\bar{s}_1 - \bar{s}_m) / (\bar{s}_M - \bar{s}_m)$  = saturation réduite du fluide 1
- $s_h(x,t)$  = approximation numérique de  $s(x,t)$
- $r(x,t)$  = diffusion capillaire
- $r_h(x,t)$  = approximation numérique de  $r(x,t)$

$\bar{p}_1(x,t)$  = pression du fluide 1

$p_2(x,t)$  = pression du fluide 2

$p(x,t)$  = pression globale

$p_h(x,t)$  = approximation numérique de  $p$

$\phi_j(x,t)$  = vitesse de filtration du fluide  $j$ ,  $j = 1, 2$

$\phi_{jh}(x,t)$  = approximation numérique de  $\phi_j(x,t)$  (formule (3.3a))

$q_0(x,t)$  =  $\phi_1(x,t) + \phi_2(x,t)$  = vitesse totale

$q_h(x,t)$  = approximation numérique de  $q_0(x,t)$

#### Fonctions de la saturation $s$ :

$p_c(s)$  = pression capillaire normalisée

$k_{rj}(s)$  = perméabilité relative de fluide  $j$ ,  $j = 1, 2$

$$a(s) = \left\{ \frac{k_{r1}(s)}{\mu_{10}} \frac{k_{r2}(s)}{\mu_{20}} / \left( \frac{k_{r1}(s)}{\mu_{10}} + \frac{k_{r2}(s)}{\mu_{20}} \right) \right\} \frac{dp_c}{ds}(s)$$

$$\alpha(s) = \int_{s_c}^s a(z) dz$$

Fonctions de la pression p :

$$\rho_j(p) = \text{densité du fluide } j, j = 1, 2$$

$$\mu_j(p) = \text{viscosité du fluide } j, j = 1, 2$$

$$B_j(p) = \rho_j(p) / \rho_{j0}$$

$$M_j(p) = \mu_j(p) / \mu_{j0}$$

Fonctions de x et p :

$$\Phi(x,p) = \text{porosité de la roche}$$

$$\phi(x,p) = (\bar{s}_M(x) - \bar{s}_m(x) \sigma(x)) \Phi(x,p)$$

Fonctions de s et p :

$$k_j(s,p) = k_{rj}(s) B_j(p) / \mu_j(p) = \text{mobilité du fluide } j, j = 1, 2$$

$$b_0(s,p) = k_1(s,p) / (k_1(s,p) + k_2(s,p)) *$$

$$b_1(s,p) = \{ k_1(s,p) k_2(s,p) / (k_1(s,p) + k_2(s,p)) \} p_c(s)$$

---

\* On remarque que notre notation diffère de [2] par  $b_{0[2]} = 2b - 1$ .

$$b_2(s,p) = \{ k_1(s,p) k_2(s,p) / (k_1(s,p) + k_2(s,p)) \} \frac{\rho_1(s,p) - \rho_2(s,p)}{(\rho_{10} + \rho_{20})/2}$$

$$\gamma(s,p) = \int_{s_c}^s (b_0(z,p) - \frac{1}{2}) \frac{dp_c}{ds}(z) dz^*$$

Fonctions de x, s, et p :

$$\gamma_1(x,s,p) = \frac{1}{(1-P_{CM}(x) \frac{\partial \gamma}{\partial p}(s,p))} \int_{s_c}^s \frac{\partial b_0}{\partial s}(z,p) p_c(z) dz^*$$

$$\gamma_2(x,s,p) = \frac{1}{(1-P_{CM}(x) \frac{\partial \gamma}{\partial p}(s,p))} \frac{k_1(s,p) \rho_1(p) + k_2(s,p) \rho_2(p)}{[(k_1(s,p) + k_2(s,p))/2] [(\rho_{10} + \rho_{20})/2]}$$

$$d(x,s,p) = (1 - P_{CM}(x) \frac{\partial \gamma}{\partial p}(s,p)) (k_1(s,p) + k_2(s,p))^*$$

$$\tilde{\psi}(x,s,p) = \psi(x) P_{CM}(x) \frac{B_1(p) B_2(p)}{M_1(p) M_2(p)} \frac{(k_{r1}(s,p)/\mu_{10} + k_{r2}(s,p)/\mu_{20})}{k_1(s,p) + k_2(s,p)}$$

Fonctions de x, s, p, et q<sub>0</sub> :

$$f(x,s,p,q_0) = b_0(s,p)q_0 + b_1(s,p)q_1(x) + b_2(s,p)q_2(x) = \text{le terme de transport}^*$$

---

\* On remarque que nos notations diffèrent de celle de [2] par

$q_{0[2]} = 1/2 q_0$  et  $b_{0[2]} = 2b_0 - 1$  et  $d_{[2]} = 1/2 d$ .

## APPENDICE 2 :: Matrices et vecteurs issus de la discrétisation en espace des équations

$$\mathcal{I}_1 = \begin{array}{c|ccc} & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & 2 \\ \hline 2I-1 & & & & & & & & & \end{array}$$

[illegible]

$$\begin{array}{c}
 \text{AR(S,P) =} \\
 \text{(Diagonale)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \frac{1}{\tilde{\psi}_1^+} \\
 \\
 \frac{1}{\tilde{\psi}_{3/2}} \\
 \\
 \frac{1}{\tilde{\psi}_2^-} + \frac{1}{\tilde{\psi}_2^+} \\
 \\
 \frac{1}{\tilde{\psi}_{5/2}} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \frac{1}{\tilde{\psi}_I^-}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 2I-1 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 2I-1
 \end{array}$$

$$\text{TR(S,P,Q)}_{2i-1} = -\frac{1}{h} \left[ f_i^+ + 4f_{\frac{2i+1}{2}} + f_{i+1}^- - 6f(\xi_i) \right] \quad i = 1 \dots I-1.$$

$$\text{TR(S,P,Q)}_{2i} = -\frac{1}{h} \left[ -f_i^+ + 4f_{\frac{2i+1}{2}} - f_{i+1}^- + 6f(\xi_{i+1}) \right] \quad i = 1 \dots I-1.$$

$$\text{BC}_s = \frac{6}{h} (-\alpha(s_a), 0 \dots 0, \alpha(s_b)) \text{ est de dimension } 2(I-1),$$

(vecteur des conditions aux bords en saturation).

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \\ I-1 & & & & & \end{vmatrix}^{2I-2} \quad \mathcal{D}_0 = \frac{1}{h} \begin{vmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & 1 \\ I-1 & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & I \end{vmatrix}$$

$$M(S,P) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{\psi_1 d_1^+} & & & & \\ & \frac{1}{\psi_2} \left( \frac{1}{d_2^-} + \frac{1}{d_2^+} \right) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{\psi_I d_I^-} \\ I & & & & & \end{vmatrix}^I$$

Matrice  
"des mobilités"

$\mathcal{D}_0^t$  est la transposée de  $\mathcal{D}_0$ , matrice de la divergence.

$$GCP = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\psi_1} \sum_{j=1}^2 \gamma_{j,1}^+ q_{j,1} , \frac{1}{\psi_2} \sum_{j=1}^2 (\gamma_{j,2}^- + \gamma_{j,2}^+) q_{j,2} , \dots , \frac{1}{\psi_I} \sum_{j=1}^2 \gamma_{j,I}^- q_{j,I} \right) \text{ (vecteur "de gravité et pression capillaire").}$$

$BC_p = \frac{1}{h} (p_a, 0, \dots, 0, -p_b)$  est de dimension  $I$ ,  
(vecteur des conditions aux bords en pression).

### APPENDICE 3 : La pression globale

On décrit ici rapidement la pression globale introduite par Chavent dans [2]. Brièvement parlant, c'est une pression de l'ensemble des deux fluides qui est reliée à la vitesse totale  $q_0$  d'une façon qui ressemble à la loi de Darcy. On suppose que la pression capillaire  $P_{CM}(x)$  est assez petite  $x \in [a,b]$ , f. [2], ce qui est toujours le cas dans la pratique. Alors la pression globale  $p(x,t)$  est définie de façon unique par

$$(A3.1) \quad p(x,t) = \frac{1}{2} [ p_1(x,t) + p_2(x,t) ] + P_{CM}(x) \gamma(s(x,t), p(x,t)).$$

$$x \in [a,b], t \in J.$$

car le membre de droite est une fonction contractante de  $p$ .

En utilisant (A3.1) et la loi de la pression capillaire (2.4), on exprime les pressions  $p_1$  et  $p_2$  en terme de  $s$  et  $p$  comme suit :

$$(A3.2) \quad p_1 = p - \{ \gamma(s,p) - 1/2 p_c(s) \} P_{CM}(x)$$

$$p_2 = p - \{ \gamma(s,p) + 1/2 p_c(s) \} P_{CM}(x)$$



Afin d'obtenir une relation entre  $p$  et  $q_0$ , on additionne les équations (2.2), i.e. les lois de Darcy pour les deux fluides, et en utilisant la définition de  $q_0$  (2.5), on obtient :

$$q_0 = -\psi(k_1 \nabla p_1 + k_2 \nabla p_2) + \psi(k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2) g \nabla Z.$$

Puis on remplace les expressions  $p_1$  et  $p_2$  dans l'équation ci-dessus par leurs expressions (A3.2) en termes de la pression globale  $p$  et de la pression capillaire. Donc on a :

$$\begin{aligned} q_0 = & -\psi(k_1+k_2)\nabla p + \psi(k_1+k_2)(\nabla \gamma P_{CM} + \gamma \nabla P_{CM}) - \\ & - \psi \frac{k_1-k_2}{2} (p_c \nabla P_{CM} + P_{CM} \nabla p_c) + \\ & + \psi(k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2) g \nabla Z. \end{aligned}$$

Après quelques calculs, on aboutit à :

$$\begin{aligned} q_0 = & -\psi(k_1+k_2)(1-P_{CM} \frac{\partial \gamma}{\partial p}) \nabla p - \psi(k_1+k_2) \int \frac{\partial b_0}{\partial s} p \, ds \nabla P_{CM} \\ & + \psi(k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2) g \nabla Z. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les notations de l'appendice 1, on a la relation voulue entre  $q_0$  et  $p$ .

$$(A3.3) \quad q_0 = -\psi d \nabla p - \psi d \sum_{j=1}^2 \gamma_j q_j.$$

On peut maintenant exprimer les vitesses de filtration en terme de  $s$ ,  $p$ , et  $q_0$ . Ecrivons :

$$\phi_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} q_0 + \frac{k_2 \phi_1 - k_1 \phi_2}{k_1 + k_2} .$$

En utilisant la loi de Darcy (2.2) on obtient :

$$\phi_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} q_0 - \psi \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} ( \nabla(p_{CM} p_c) - (\rho_1 - \rho_2) g \nabla z )$$

ce qui s'écrit avec les notations de l'appendice 1 :

$$(A3.3) \quad \phi_1 = b_0 q_0 + b_1 q_1 + b_2 q_2 + r$$

et comme  $\phi_2 = q_0 - \phi_1$ , on a

$$(A3.4) \quad \phi_2 = (1 - b_0)q_0 - b_1 q_1 - b_2 q_2 - r.$$

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

